FICHE METHODE : ANALYSE DIMENSIONNELLE

Notion de dimension

- La connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur sa nature physique. La dimension de la grandeur G se note [G].

Les 7 grandeurs fondamentales du Système international d'unités.		
Grandeurs physiques	**Dimension**	**Unité S.I.**
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Intensité du courant électrique	I	ampère (A)
Intensité lumineuse	J	candela (Cd)
Température	θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)

Exemple: Si G est une masse, alors [G] = M, elle a la dimension d'une masse ; on dit aussi qu'elle est homogène à une masse.

- La relation [G] = M correspond à **l'équation aux dimensions** de la grandeur G.
- Pour écrire l'équation aux dimensions de la grandeur G, aucun choix de système d'unités n'est imposé.
- Lorsque dans l'écriture de l'équation aux dimensions d'une grandeur G, on obtient [G] = 1, la grandeur est dite sans dimension ou de dimension 1. Dans le cas d'un angle, on obtient 1 donc un angle est sans dimension, mais il y a quand même une unité : le radian.
- Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension. En physique, une équation est forcément homogène (sinon elle est fausse...).

Règles sur les équations aux dimensions

- On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension
- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs : [AB] = [A][B]
- La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre sans dimension.
- Pour les fonctions : sin(u), cos(u), tan(u), ln(u), log(u) et e^u, la grandeur u est sans dimension.
- L'équation aux dimensions de toute grandeur G peut se mettre sous la forme : $[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$

Vérification de l'homogénéité d'une formule

Lors de l'établissement d'une expression, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier son homogénéité et de la corriger le cas échéant, sachant qu'une expression non homogène ne peut être que fausse. Pour obtenir l'équation aux dimensions de chaque grandeur présente dans l'expression, on utilise des relations dites « passerelles » entre les grandeurs mises en jeu. Ces relations sont obtenues à partir de formules établies en cours.

Exemple: vérification de l'homogénéité de l'expression de la période d'un pendule simple :

$$\mathbf{T_0 = 2\ \pi} \sqrt{(\boldsymbol{L / g}}$$

avec T_0 est la période du pendule, L la longueur du fil et g l'accélération de la pesanteur. L'expression est « dimensionnellement » juste si : $[T_o] = [\sqrt{(\boldsymbol{L / g}}\ \mathbf{]}$

- La dimension du premier terme de l'égalité est $[T_o] = T$ (un temps).

- L'équation aux dimensions du second terme peut s'écrire :

$$[\sqrt{(\boldsymbol{L / g}}\ )] = [\sqrt{L}] / [\sqrt{g}\ ] = [\ L\ ]^{1/2}\ [\ g\ ]^{-1/2}$$

Sachant que d'après la 3e loi de Newton $\sum \mathbf{F_{ext}} = m.\mathbf{a}$, si $\sum \mathbf{F_{ext}} = \mathbf{P} = m.\mathbf{g}$ alors [P] = [m] [g] = [m] [a] soit **[g] = [a] =** $\mathbf{LT^{-2}}$. En remplaçant [g] dans l'équation aux dimensions de $[\ L\ ]^{1/2}\ [\ g\ ]^{-1/2}$, on obtient :

$$L^{1/2}\ (LT^{-2})^{-1/2} = L^{1/2} L^{-1/2}\ (T^{-2})^{-1/2} = T$$

L'expression $T_o = 2\ \boldsymbol{\pi} \sqrt{(\boldsymbol{L / g}}$ est homogène car les deux termes de l'équation ont la même dimension, celle d'un temps.