Ch.6 LOIS DE NEWTON ET LOIS DE KEPLER. EXERCICE RESOLU. p : 177 n°22

Exercice p : 177 n°22 : Quelle est la masse de Jupiter ?

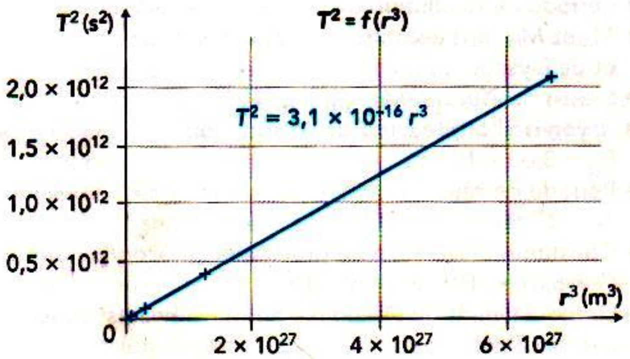
Compétences : *Mobiliser ses connaissances; exploiter un graphique.*

La planète Jupiter possède de nombreux satellites, On s'intéresse à ceux dont la trajectoire est considérée circulaire. Chacun d'eux, modélisé par son centre de gravité, n'est soumis qu'à la seule force de gravitation exercée par Jupiter.

La distance entre les centres de gravité de Jupiter et du satellite étudié est notée r.

1. a. Quelle est l'expression vectorielle de la force de gravitation exercée par Jupiter, de masse M, sur un satellite de masse m ?
   b. Représenter cette force $\vec{F}_{J/S}$ sur un schéma.
2. Montrer que, dans le référentiel, lié au centre de Jupiter, supposé galiléen, le satellite a un mouvement uniforme et exprimer la valeur de sa vitesse.
3. Choisir parmi les quatre propositions ci-dessous celle qui correspond au satellite le plus rapide. Justifier la réponse.
   a. le satellite le plus proche de Jupiter;
   b. le satellite le plus éloigné de Jupiter;
   c. le satellite le plus léger;
   d. .le satellite le plus lourd.
4. À partir de l'expression de la valeur de la vitesse, établir l'expression de la période de révolution T d'un satellite autour de Jupiter

5.a. L'étude des mouvements de quatre satellites de Jupiter (Callisto, Europe, Ganymède et Io) a permis de déterminer la période et le rayon de l'orbite de chacun. On a représenté pour chaque satellite les valeurs des couples (r^3; T^2).



Montrer que l'allure de la représentation graphique est en accord avec la troisième loi de Kepler.

5.b. L'équation modélisant la droite obtenue est donnée sur le graphique soit $T^2 = 3{,}1 \times 10^{-16}\ r^3$.
En déduire l'ordre de grandeur de la masse de Jupiter.

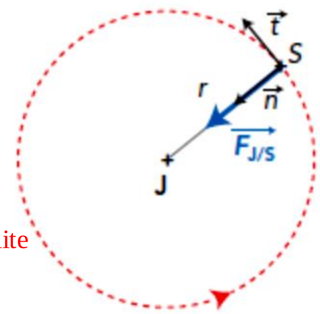
Donnée : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$.

Solution. p : 177 n°22 : Quelle est la masse de Jupiter ?

1.a. Expression vectorielle de la force de gravitation exercée par Jupiter, de masse M, sur un satellite de masse m ?

$$\boxed{\vec{F}_{J/S} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{n}}$$

b. Représenter cette force $\vec{F}_{J/S}$ sur un Schéma : voir ci-contre.



2. Montrer que, dans le référentiel, lié au centre de Jupiter, supposé galiléen, le satellite a un mouvement uniforme et exprimer la valeur de sa vitesse.

- Système : {satellite} et référentiel jupitocentrique.
- Forces extérieures s'exerçant sur le satellite : la force $\vec{F}_{J/S}$ de gravitation exercée par Jupiter sur le satellite
- Application de la deuxième loi de Newton : $\Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ soit $\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$ donc $\vec{F}_{J/S} = m.\vec{a}$

$\frac{G.m.M.}{r^2}\vec{n} = m.\vec{a}$ soit en simplifiant par m : $\boxed{\vec{a} = \frac{G.M.}{r^2}\vec{n}}$ On identifie avec $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{r}.\vec{n}$

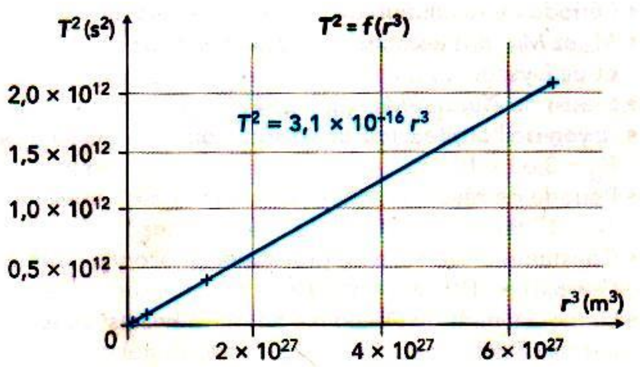
On a donc : $\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{G.M}{r^2}}$

- **L'égalité dv / dt = 0 implique que la valeur de la vitesse v est constante.** Ce mouvement circulaire est donc **uniforme.**
- L'égalité $\frac{v^2}{r} = \frac{G.M}{r^2}$ conduit à $\boxed{v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}$

3. Choisir parmi les quatre propositions ci-dessous celle qui correspond au satellite le plus rapide. Justifier la réponse.

On constate que la valeur de la vitesse du satellite est indépendante de la masse du satellite. Elle dépend du rayon $\mathbf{r = R_T + \mathit{h}}$ de la trajectoire. La vitesse augmente lorsque ce rayon diminue, donc proposition a. : pour le satellite le plus proche de Jupiter.

4. Période de révolution T d'un satellite autour de Jupiter.



La période de révolution est la durée mise par le satellite pour décrire sa trajectoire circulaire à la vitesse de valeur v constante :

$$T = \frac{circonférence\ du\ cercle}{v} = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2.\pi r}{\sqrt{\frac{G.M}{r}}} = 2.\pi.r\sqrt{\frac{r}{G.M}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M}} \quad \text{soit} \quad \boxed{T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M}}}$$

5..a. L'étude des mouvements de quatre satellites de Jupiter (Callisto, Europe, Ganymède et Io) a permis de déterminer la période et le rayon de l'orbite de chacun. On a représenté pour chaque satellite les valeurs des couples (r^3; T^2).

Montrer que l'allure de la représentation graphique est en accord avec la troisième loi de Kepler.

- Représentation graphique est un droite passant par l'origine donc de la forme : y = k.x, soit en adaptant : $T^2 = k.\,r^3$.
  T^2 donc est proportionnel à r^3, k est le coefficient directeur de la droite.

- Utilisation de la 3ème loi de Kepler :
  On élève T au carré : $T^2 = \dfrac{4\pi^2.\,r^3}{G.M}$ de la forme $T^2 = k.\,r^3$ avec $k = \dfrac{4\pi^2}{G.M}$
- On retrouve la 3ème loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{r^3}$ = constante = $\mathbf{\dfrac{4\pi^2}{G.M}}$ **.**

5.b. **L'équation modélisant la droite obtenue est donnée sur le graphique soit $T^2 = 3{,}1 \times 10^{-16}\ r^3$.**
En déduire l'ordre de grandeur de la masse de Jupiter. *Donnée : G = 6,67 x* 10^{-11} $m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$.
D'après l'équation donnée sur le graphique, on en déduit que : $\dfrac{T^2}{r^3} = k = 3{,}1.10^{-16}$ donc $\dfrac{4\pi^2}{G.M} = k$

donc $\boxed{M = \dfrac{4\pi^2}{G.k}}$ A.N. : $\boxed{M = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}1 \times 10^{-16}} = 1{,}9.10^{27}\ kg.}$