EXERCICES Ch6. APPLICATION DES LOIS DE NEWTON

Comment décrire le mouvement des satellites et des planètes?

Exercice p 173 n°10. Faire une analyse dimensionnelle

Pour une planète du système solaire, la troisième loi de Kepler se traduit par l'expression : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

Indiquer la signification de chaque grandeur et vérifier à aide d'une analyse dimensionnelle que l'expression est homogène.

Donnée : G = 6,67 x 10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.

Solution :

La troisième loi de Kepler : loi des périodes.

$\frac{T^2}{r^3}$ = constante = $\frac{4.\pi^2}{G.M_S}$

- T : période de révolution d'un astre autour du Soleil
- r : rayon de la trajectoire (supposée circulaire)
- G : constante de gravitation universelle
- M_S : masse du Soleil.

Pour vérifier l'homogénéité d'une égalité, on détermine la dimension de chacun des membres.

- $\left[\frac{T^2}{r^3}\right] = \frac{[T]^2}{[r]^3} = T^2.L^{-3}$
- $\left[\frac{4\pi^2}{G.M_S}\right] = \frac{[4\,\pi^2]}{[G].[M_S]}$ L'énoncé donne l'unité de G en $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, donc : $[G] = L^3.M^{-1}.T^{-2}$ donc :

$\left[\frac{4\pi^2}{G.M_S}\right] = \frac{1}{L^3.M^{-1}.T^{-2}.M} = \frac{1}{L^3.T^{-2}} = T^2.L^{-3}$

- Conclusion : $\left[\frac{T^2}{r^3}\right] = \left[\frac{4\pi^2}{G.M_S}\right]$: L'égalité est homogène.

Exercice p 175 n°18. Neptune et Galatée. Compétences : Raisonner, argumenter

Galatée est l'un des 13 satellites actuellement connus de la planète Neptune. Neptune est la huitième planète du système solaire.
Données : G = (6,67384 ± 0,00080)*10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.
Galatée : période de révolution T = (0,429 ± 0,001) jour, longueur du demi-grand axe a = (6,19 ± 0,01) * 10^4 km, masse M_G ;
Neptune : Masse M_N = (1,02 ± 0,01) * 10^{26} kg.

1. a. Calculer le rapport Q = $\frac{T^2}{a^3}$ pour Galatée.
   b. Calculer l'incertitude existant sur la valeur de Q.
      On donne : U(Q) = Q. $\sqrt{4\left(\frac{U(T)}{T}\right)^2 + 9\left(\frac{U(a)}{a}\right)^2}$.
   c. En déduire un encadrement de la valeur Q.

2.a. Calculer le rapport Q' = $\frac{4\pi^2}{G.M_N}$ pour Neptune.
   b. Calculer l'incertitude existant sur Q'. On donne : U(Q') = Q. $\sqrt{4\left(\frac{U(G)}{G}\right)^2 + \left(\frac{U(M_N)}{M_N}\right)^2}$.
   c. En déduire un encadrement de la valeur Q'.

3. La troisième loi de Kepler est-elle vérifiée dans cette situation ?

Solution :

1. a. Calcul du rapport Q = $\frac{T^2}{a^3}$ pour Galatée.

A.N. : T = 0,429 jour = 0,429 * 24 * 3600 = 3,71.10^4 s
a = 6,19 * 10^4 km = 6,19 * 10^7 m
donc Q = 5,79.10^{-15} $s^2.m^{-3}$.

b. Calcul de l'incertitude existant sur la valeur de Q.

On donne : U(Q) = Q. $\sqrt{4\left(\frac{U(T)}{T}\right)^2 + 9\left(\frac{U(a)}{a}\right)^2}$ = 5,79.10^{-15}. $\sqrt{4\left(\frac{0,001}{0,429}\right)^2 + 9\left(\frac{0,01}{6,19}\right)^2}$ = 4*10^{-17} $s^2.m^{-3}$ = 0,04 . 10^{-15} $s^2.m^{-3}$
(1 chiffre significatif arrondi à la valeur supérieure).

c. En déduire un encadrement de la valeur Q.

Q = 5,79.10^{-15} $s^2.m^{-3}$ et U(Q) = 0,04 . 10^{-15} $s^2.m^{-3}$
Q = (5,79.10^{-15} ± U(Q)) $s^2.m^{-3}$ soit (5,79.10^{-15} - 0,04 .10^{-15}) $s^2.m^{-3}$ ≤ Q ≤ (5,79.10^{-15} + 0,04 .10^{-15}) $s^2.m^{-3}$
Donc : **(5,75.10^{-15}) $s^2.m^{-3}$ ≤ Q ≤ (5,79.10^{-15}) $s^2.m^{-3}$**

2.a. Calculer le rapport Q' = $\frac{4\pi^2}{G.M_N}$ pour Neptune.

A.N. : G = 56,67384 *10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.
M_N = 1,02 *10^{26} kg
Q' = 5,80.10^{15} $s^2.m^{-3}$.

2.b. Calculer l'incertitude existant sur Q'. On donne : U(Q') = Q. $\sqrt{4\left(\frac{U(G)}{G}\right)^2 + \left(\frac{U(M_N)}{M_N}\right)^2}$

A.N. : U(Q') = Q. $\sqrt{4\left(\frac{U(G)}{G}\right)^2 + \left(\frac{U(M_N)}{M_N}\right)^2}$ = 56,67384 *10^{-11} . $\sqrt{4\left(\frac{0,00080}{6,67384}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{1,02}\right)^2}$ = 6*10^{-17} $s^2.m^{-3}$ = 0,06 10^{-15} $s^2.m^{-3}$

2.c. Encadrement de la valeur de Q' : 5,74 * 10^{-15} $s^2.m^{-3}$ ≤ Q' ≤ 5,74 * 10^{-15} $s^2.m^{-3}$

3. La troisième loi de Kepler est-elle vérifiée dans cette situation ?

La comparaison de 2 intervalles permet d'écrire : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_N}$ La troisième loi de Kepler est vérifiée.