EXERCICE SUR LES SATELLITES. Ch6.

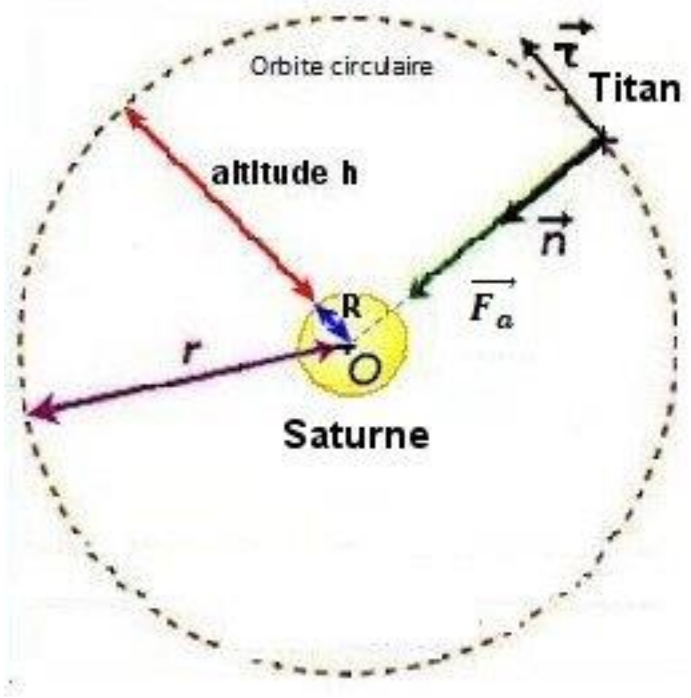
Titan, satellite de Saturne

Données : G : constante de gravitation G = $6{,}67.10^{-11}$ S. I. ; r : rayon de l'orbite de Titan =$1{,}22.\ 10^{6}$ km.
T : période de rotation de Titan T = $1{,}38.\ 10^{6}$ s autour de Saturne
En avril 1996, la France a participé à la mission Cassini qui a étudié Titan, satellite de Saturne ; cet objet céleste est le seul dans le système solaire à posséder, comme la Terre, une dense atmosphère de diazote favorable à l'apparition de la vie.
Le mouvement de Titan, de masse m, est étudié dans un repère considéré comme galiléen, ayant son origine au centre de Saturne et ses trois axes dirigés vers trois étoiles fixes.
On suppose que Saturne et Titan ont une répartition de masse à symétrie sphérique.
Titan se déplace sur une orbite circulaire à la distance r du centre de Saturne.

1. Faire le schéma de l'orbite de Titan et représenter la force qui s'exerce sur Titan.
2. Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.
3. Établir l'expression littérale de sa vitesse v et de sa période T en fonction de G, r et M_S , Ms étant la masse de Saturne.
4. Calculer la masse M_S de Saturne.

Solution :

1.Faire le schéma de l'orbite de Titan et représenter la force qui s'exerce sur Titan.



- Système : {Le satellite S}
- Référentiel : saturne-centrique supposé galiléen.
- Forces extérieures appliquées au satellite: La force d'attraction gravitationnelle : $\boxed{\vec{F_a} = \frac{G.m_T\, M_S}{r^2}.\, \vec{n}}$ **de valeur** $F_a = \frac{G.m_T.M_S}{r^2}$

2. Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

- Deuxième loi de Newton : $\sum\vec{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$

- soit : $\vec{F_a} = m_T.\vec{a}$ **soit** $\frac{G.m_T\, M_S}{r^2}.\, \vec{n} = m_T.\vec{a}$.

soit en simplifiant $\boxed{\vec{a} = \frac{G.M_S}{r^2}.\, \vec{n}}$

Le vecteur accélération est dirigé suivant $\vec{n}$.
L'accélération n'a pas de composante tangentielle donc l'accélération tangentielle est nulle soit $a_T = 0$
Or par définition : $a_T = \frac{dv}{dt}$ donc $\frac{dv}{dt}$ = 0 donc la valeur v de la vitesse est constante. **Le mouvement circulaire est donc uniforme.**

3.Établir l'expression littérale de sa vitesse v et de sa période T en fonction de G, r et M_S, Ms étant la masse de Saturne.

- On projette le vecteur accélération $\vec{a}$ sur $\vec{n}$:

$\boxed{a_n = \frac{G.\ M_S}{r^2}}$ or par définition, l'accélération normale est : $a_n = \frac{v^2}{r}$

donc : $\frac{v^2}{r} = \frac{G.\ M_S}{r^2}$ **. On simplifie :** $v^2 = \frac{G.M_S}{r}$ **soit** $\boxed{v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}}$

• Période T de Titan autour de Saturne :

La période T de révolution ***est la durée mise par le satellite pour faire un tour c'est-à-dire pour parcourir un cercle de rayon r. Elle est égale à la circonférence de l'orbite soit 2 π r divisée par la vitesse du satellite:***

$$T = \frac{2.\pi.r}{v} \quad \text{or} \quad v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2.\pi.r}{\sqrt{\frac{G.M_S}{r}}} = 2.\pi.r\sqrt{\frac{r}{G.M_S}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}} \qquad T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$$

5. Calcul de la masse M_S de Saturne.

On connait : r : rayon de l'orbite de Titan =$1{,}22.\ 10^{6}$ km = $1{,}22.10^{6}$ m ; période de rotation de Titan T = $1{,}38.\ 10^{6}$ s autour de Saturne
G : constante de gravitation G = $6{,}67.10^{-11}$ S. I.

On tire M_S de l'expression de T : Pour cela, on élève T au carré : $T^2 = 4.\pi^2.\frac{r^3}{G.M_S}$.

Donc : $\boxed{M_S = \frac{4\pi^2.r^3}{T^2.G}}$ A.N. : $M_S = 5{,}64.10^{26}$ kg.
