Ch.6. Partie III. LES LOIS DE KEPLER.
Mouvement des satellites et des planètes

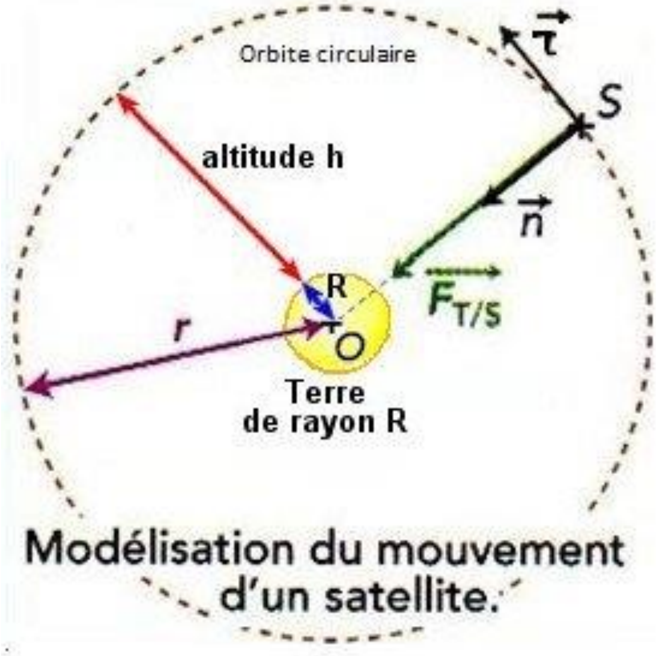
1) Expression de la vitesse d'un satellite en mouvement circulaire

- **Système :** Le satellite de masse m.
- **Référentiel :** géocentrique supposé galiléen.
- **Repère :** repère de Frénet (repère lié au satellite : l'origine S du repère est confondue avec le centre d'inertie du satellite R (S, $\vec{\tau}$, $\vec{n}$).

- Inventaire des forces s'exerçant sur le satellite : Le satellite n'est soumis qu'à **une seule force** : la **force d'attraction gravitationnelle de la Terre sur le satellite** (les autres forces de gravitation des autres astres sont négligeables, ainsi que les forces s'exerçant par l'atmosphère terrestre : $\boxed{\overrightarrow{F_{T/S}} = \frac{G.m\,M_T}{r^2}.\vec{n}}$

C'est la **loi de gravitation de Newton**.

Notation : r : distance entre les centres d'inertie de la Terre et du satellite ; r = h + R_T avec h altitude du satellite ; R_T rayon de la Terre ; m : masse du satellite ; M_T, masse de la Terre ;
G : constante de gravitation universelle G = $6{,}67.10^{-11}$N.kg^{-2}.m^2.
Unité du S.I.: les masses en kg, les longueurs en m et $F_{T/S}$ en N.



- **Application de la deuxième loi de Newton** :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_{T/S}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \mathrm{m}.\frac{d(\vec{v})}{dt} = \mathrm{m}.\vec{a}$$ soit

$\boxed{\overrightarrow{F_{T/S}} = m\vec{a}}$

Donc : $\frac{G.m\,M_T}{r^2}.\vec{n} = \mathrm{m}.\vec{a}$. En simplifiant par m, on a :

$\boxed{\frac{G.\,M_T}{r^2}.\vec{n} = \vec{a}}$ **Le vecteur accélération est centripète (dirigé suivant la normale $\vec{n}$ vers le centre de la trajectoire).**

L'accélération tangentielle est donc nulle : $\vec{a_t} = \vec{0}$ soit $\frac{dv}{dt} = 0$

La vitesse est donc constante et donc le mouvement du satellite est un mouvement circulaire uniforme.

● Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est une accélération normale :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a_n} = a_n.\,\vec{n} = \frac{v^2}{r}\,\vec{n}}$$

• On en déduit alors : $\frac{G.\,M_T}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}}}$ La valeur de la vitesse du satellite est indépendante de sa masse, mais dépend du rayon **r = R_T + *h*** de la trajectoire. La vitesse du satellite diminue lorsque ce rayon augmente.

Lorsqu'un satellite a une trajectoire circulaire, alors sa vitesse est constante et vaut $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$

Le mouvement est circulaire uniforme.

2) Période T de révolution du satellite :

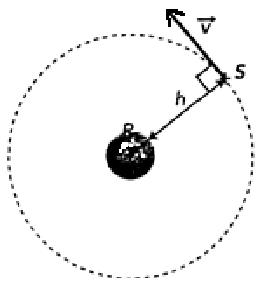
La période T de révolution du satellite: c'est la durée mise par le satellite pour faire un tour c'est-à-dire pour parcourir un cercle de rayon r. Elle est égale à la circonférence de l'orbite soit 2 π r divisée par la vitesse du satellite:

$$T = \frac{2.\pi r}{v} \text{ or } v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} \Rightarrow T = \frac{2.\pi r}{\sqrt{\frac{G.M_T}{r}}} = 2.\pi.r\sqrt{\frac{r}{G.M_T}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}$$

$$\boxed{T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}}$$

Unité : T en s ; r en m ; G = 6,67x10^{-11} m^3.kg^{-1}s^{-2}

La période de révolution du satellite dépend du rayon de la trajectoire. Elle augmente lorsque ce rayon augmente. T est indépendante de la masse du satellite.



Généralisation :
Cette étude réalisée pour un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de masse M_T peut être généralisée à tout satellite ou planète en orbite circulaire autour d'un astre de masse M.

Quelques valeurs de vitesse de satellites.

Satellite	Altitude	Vitesse (m.s^{-1})
Spot	820 km	7400
Astra (TV)	35 800 km	3075
Météostat	35 800 km	3075

3) Les 3 lois de Kepler : Lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil.

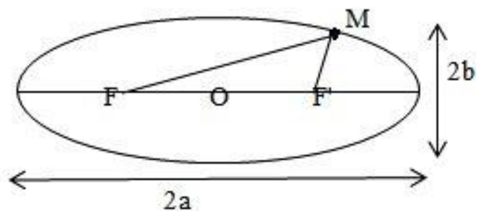
Kepler (1571-1630) formule trois lois qui **décrivent le mouvement des planètes autour du soleil.**

① Première loi de Kepler : loi des orbites

Les planètes décrivent autour du Soleil, des ellipses dont le centre de gravité du Soleil est l'un des foyers.

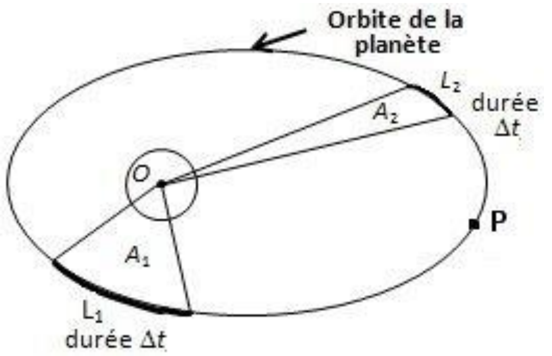
Rappel : **u**ne ellipse est une courbe caractérisée par :
- ses foyers F et F ' symétriques l'un de l'autre par rapport au point O centre de l'ellipse.
- Une distance 'a' nommé demi-grand axe, et b le demi-petit axe.
- Un point M de l'ellipse vérifie : FM+MF' = 2a

Dans le cas du système solaire, le Soleil occupe le foyer F de l'ellipse.



② Deuxième loi de Kepler : loi des aires

2ème loi de Kepler : le segment de droite qui relie le centre du Soleil et la planète balaye des aires égales pendant des intervalles de temps Δt égaux.



Sur le schéma : l'aire A_1 et égale à l'aire A_2. En revanche les portions d'ellipse parcourues sont différentes : $L_1 > L_2$. Une planète plus proche du Soleil a donc une vitesse plus grande que lorsque lorsqu'elle est éloignée du Soleil.

Remarque : Dans le cas d'une trajectoire considérée circulaire, le mouvement de la planète est circulaire uniforme.

La deuxième loi de Kepler peut se généraliser à d'autres systèmes : Terre-Satellite, Jupiter et satellites Europe, Io …

③ Troisième loi de Kepler : loi des périodes

Soit T la période de révolution de la planète autour du soleil, et 'a' la longueur du demi-grand axe de l'ellipse.

Le carré de le période de révolution divisée par le cube du demi-grand axe 'a' est une constante. $\frac{T^2}{a^3}$ **= constante. La période T ne dépend pas de la planète mais uniquement de la masse M_S du soleil et de la constante d'attraction universelle G. On démontre que :** $\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$ avec G = 6,67.10-11 N.kg^{-2}.m^2 : constante de gravitation universelle

Dans le cas particulier où la **trajectoire est un cercle de rayon r,** le demi-grand axe de l'ellipse est le rayon du cercle : r = a., la troisième loi de Kepler devient : $\frac{T^2}{r^3} = \text{constante} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$

$M_S = 1{,}96.10^{30}$ kg : masse du soleil.

•Démonstration pour trouver l'expression de la constante (dans l'approximation d'un mouvement circulaire) : On part de l'expression de la période de révolution d'une planète autour du Soleil :

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M}}$$

- r est le rayon de la trajectoire circulaire : distance entre le centre de la planète considérée et le centre du Soleil.
- M est la masse de l'astre central c'est-à-dire la masse du Soleil.

On élève T au carré : …

Généralisation :
Les trois lois de Kepler énoncées dans le cas de planètes en orbite autour du Soleil peuvent être généralisées à tout satellite ou planète en orbite autour d'un astre de masse M.

4) Satellites géostationnaires :

Comme leur nom l'indique, **ces satellites sont fixes (stationnaire) par rapport à la terre (géo)**.
Pour cela, il faut qu'ils décrivent un **mouvement circulaire uniforme** dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles terrestres. Ils **évoluent donc dans un plan contenant l'équateur : plan passant par le centre de la Terre**. Ils tournent dans le même sens de rotation que la terre (d'ouest en est). **Leur période de révolution doit être exactement égale à la période de rotation de la terre autour de l'axe de ces pôles (jour sidéral soit 24h environ).**
On peut calculer l'altitude à laquelle le satellite doit se situer pour satisfaire cette dernière condition :

- Utilisons la 3ème loi de Kepler applicable à ce satellite : $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}$. On tire : $r = \sqrt[3]{\frac{G.M_T.T^2}{4.\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}976*10^{24}*(24*3600)^2}{4\,\pi^2}}$

soit r = $42{,}2.10^6$ m. Donc l'altitude du satellite géostationnaire est h = r - R_T = $42{,}2.10^6 - 6{,}4.10^6 = 36.10^6$ m = **36000 km.**
Météosat et Astra sont des satellites géostationnaires.

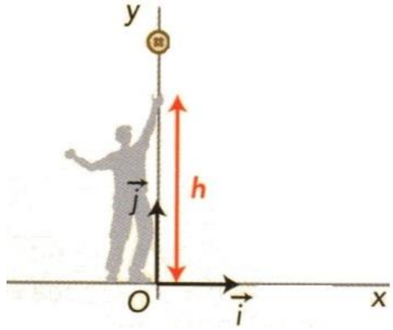
5) Etat d'un corps situé dans un satellite en mouvement autour de la Terre :

On suppose que ce corps est tout d'abord lié au satellite. Lorsque le satellite est en orbite, l'objet est animé du même mouvement que le satellite. Si on le libère à un instant t, celui-ci n'est plus soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre. D'après 2ème loi de Newton, le satellite et l'objet qu'il contient sont soumis à la même accélération radiale ($a_n = v^2 / r$). Comme leur distance au centre de la Terre est égale, ils ont exactement le même mouvement, **l'objet semble flotter dans le satellite**. En fait**, ils sont tous les deux animés du même mouvement de chute libre tout autour de la terre. C'est l'état d'impesanteur** ! Rq : le référentiel du satellite n'est pas galiléen : on ne peut pas appliquer le principe d'inertie dans un tel référentiel.

Exercices ch. 6. LOIS DE NEWTON ET DE KEPLER . QCM p 169 n° 1 et 2.

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Tigibus lance un bouton de masse *m* verticalement au-dessus de lui, à partir d'une hauteur *h*. La valeur initiale de la vitesse est v_o. On étudie le mouvement du bouton dans le repère (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) contenu dans le plan de la trajectoire.
L'intensité de la pesanteur est notée g.



1 Mouvement dans un champ uniforme	A	B	C
1. Un référentiel pertinent pour étudier le mouvement du bouton est :	le référentiel héliocentrique.	le référentiel géocentrique.	un référentiel terrestre.
2. Dans l'hypothèse d'une chute libre, le bouton est uniquement soumis :	à son poids et aux forces de frottements de l'air.	à son poids.	aux forces de frottements de l'air.
3. Le vecteur accélération du bouton est :	vertical ascendant.	vertical descendant.	horizontal et dans le sens du mouvement.
4. À chaque date *t*, l'abscisse v_x du vecteur vitesse du bouton est :	0	v_0	$-v_0$
5. À chaque date *t*, l'ordonnée v_y du vecteur vitesse du bouton est :	$-g\cdot t+v_0$	$+g\cdot t+v_0$	$-g\cdot t-v_0$
6. Les équations horaires du mouvement du bouton sont :	$\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{g\cdot t^2}{2}+v_0\cdot t+h \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{g\cdot t^2}{2}+v_0\cdot t-h \end{cases}$	$\begin{cases} x=h \\ y=-\dfrac{g\cdot t^2}{2}+v_0\cdot t \end{cases}$
7. La trajectoire du bouton est :	parabolique.	circulaire.	rectiligne.

2 Mouvement des satellites et des planètes			
1. Le référentiel le plus adapté à l'étude du mouvement de la Lune autour de la Terre est : 	le référentiel héliocentrique.	le référentiel géocentrique.	un référentiel terrestre.
2. Dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement de la Lune dans ce référentiel est :	rectiligne uniforme.	circulaire uniforme.	circulaire non uniforme.
3. D'après la loi des aires, le segment de droite reliant les centres de gravité de la Lune et de la Terre :	balaie des aires égales pendant des durées égales.	a une trajectoire elliptique.	a une longueur constante.
4. Un satellite est en orbite autour de la Terre. Il effectue une révolution de rayon *r* avec une période *T*. La troisième loi de Kepler s'écrit :	$\dfrac{T^3}{r^2}=$ constante	$\dfrac{r^3}{T^2}=$ constante	$\dfrac{T^2}{r^3}=$ constante

Exercices p : 176 Ch. 6. Lois de Képler .

Comment décrire le mouvement des satellites et des planètes ?

Exercice p 173 n°10. Faire une analyse dimensionnelle

Pour une planète du système solaire, la troisième loi de Kepler se traduit par l'expression : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

Indiquer la signification de chaque grandeur et vérifier à aide d'une analyse dimensionnelle que l'expression est homogène.

Donnée : G = 6,67 x 10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.

Exercice p 173 n°11. Illustrer les lois de Kepler

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre dont la trajectoire est elliptique.

1.Énoncer la première loi de Kepler appliquée à cette situation, puis représenter sa trajectoire en précisant la position de la Terre.

2.Énoncer la deuxième loi de Kepler appliquée à cette situation, puis l'illustrer sur le schéma.

Exercice p 173 n°12. Décrire le mouvement d'une planète.

Vénus est la planète du système solaire dont l'orbite autour du Soleil est la plus proche d'un cercle. On peut considérer que son mouvement est circulaire et uniforme.

1. Définir un mouvement circulaire uniforme.
2. Sans calcul, expliquer la démarche à suivre pour déterminer la valeur de la vitesse de Vénus.

Exercice p 173 n°13. Phobos. Compétences : Faire un schéma; mobiliser ses connaissances; exploiter une relation.

Le centre de gravité P de Phobos, satellite naturel de la planète Mars, est en mouvement circulaire autour de cette planète

1. Préciser le référentiel d'étude. Faire un schéma de la situation en représentant le repère (P; $\vec{t}$,$\vec{n}$)
2. En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de gravité de Phobos.
3. Montrer que le mouvement du centre de gravité de Phobos est uniforme.