Pondichéry 2003. Mise en orbite d'un satellite artificiel par la fusée Ariane (6 points)

1) L'ascension de la fusée Ariane

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme : son intensité est $g_0 = 9{,}8$ m.s $^{-2}$.

On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut.

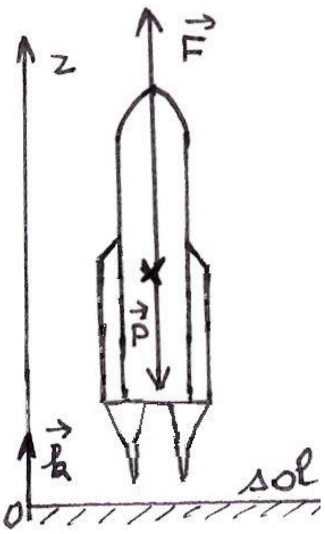
On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen.

1.1. Représenter clairement, sur un schéma, en les nommant, les deux forces qui agissent sur la fusée Ariane lorsqu'elle s'élève verticalement. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède dans l'air.

Système: {la fusée}. Référentiel: terrestre supposé galiléen

Inventaire des forces : Poids $\vec{P}$ de la fusée (action à distance) : suivant la verticale ver le bas.

$\vec{F}$: force de poussée due aux gaz (action de contact): suivant la verticale vers le haut.



1.2. A un instant quelconque, la masse de la fusée est m.

Déterminer en fonction de m (masse de la fusée) et des intensités des 2 forces précédentes la valeur de l'accélération a.

On applique la 2ème loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \text{m.}\frac{d(\vec{v})}{dt} = \text{m.}\vec{a}$ $\Rightarrow$

$\vec{P} + \vec{F} = \text{m.}\vec{a}$. soit $\vec{a} = \frac{\vec{P}+\vec{F}}{m}$ or $\vec{P} \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \\ P_z = -P \end{cases}$ $\vec{F} \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = F \end{cases}$

$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = \frac{-P+F}{m} \end{cases}$ Seule la composante a_z n'est pas nulle.

$a = a_z = \sqrt{0^2 + 0^2 + (\frac{F-P}{m})^2} = \frac{F-P}{m}$ or $P = m.g_0$ D'où $a = \frac{F - mg_0}{m} = \frac{F}{m} - g_0$

$\boxed{a = \frac{F}{m} - g_0}$

1.3. Situation au décollage. La masse de la fusée vaut alors m_1. Calculer la valeur numérique de l'accélération a_1 à cet instant.

A.N. : F = 2445 kN = 2445*10^3 N et $\mathbf{m_1}$ **= 208 t** = 208*10^3 kg. D'où $a_1 = \frac{2445*10^3}{208*10^3} - 9{,}8$ = **2,0 m.s^{-2}**.

Situation qui est celle immédiatement avant que tout le peroxyde d'azote ne soit consommé. La masse de la fusée vaut alors m_2. (Masse de peroxyde d'hydrogène = 147,5 tonnes). Calculer la valeur numérique de m_2 puis celle de l'accélération a_2 à cet instant.

$m_2 = m_1$ – masse de peroxyde d'azote emporté = 208*10^3 – 147,5*10^3 = 60,5*10^3 kg soit **m_2 = 60,5*10^3 kg**

$a_2 = \frac{F}{m_2} - g_0 = \frac{2445*10^3}{60{,}5*10^3} - 9{,}8$ = **31 m.s^{-2}**.

Le mouvement d'ascension de la fusée est-il uniformément accéléré ?

La masse de la fusée varie donc la valeur de l'accélération change au cours du temps. Le mouvement n'est pas uniformément accéléré.

1.4. *La vitesse d'éjection $\vec{V_e}$ des gaz issus de la combustion du peroxyde d'azote est donnée par la relation :* $\vec{V_e} = \frac{\Delta t}{\Delta m}.\vec{F}$

où $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est l'inverse de la variation de masse de la fusée par unité de temps et caractérise la consommation des moteurs.

• **Vérifier l'unité de V_e par analyse dimensionnelle. Calculer la valeur numérique de V_e.**

$[V_e] = \left[\frac{\Delta t}{\Delta m}.F\right] = \frac{[\Delta t]}{[\Delta m]}.[F]$ or $[\Delta t] = T$; $[\Delta m]$ = M ; et F= m.a (2ème loi de Newton) soit [F] = M.L.T^{-2} donc

$[V_e] = \frac{T.\ M.L.T^{-2}}{M}$ = M.T^{-1}soit **$[V_e]$ = M.T^{-1}** donc **V_e est bien homogène à une vitesse et s'exprime en m.s^{-1} dans le S.I.**

A.N. : $V_e = \left|\frac{\Delta t}{\Delta m}\right|.F$ or Δm = 147,5 t = 147,5*10^3 kg ; Δt = 145 s et F = 2445*10^3 N donc $V_e = \frac{45}{147{,}5*10^3}$ = 2,40*10^3 m.s^{-1}.

• **Quel est le signe de $\frac{\Delta t}{\Delta m}$? En déduire le sens de $\vec{V_e}$. Qu'en pensez-vous ?**

Comme la masse de la fusée diminue : $\Delta m < 0$ donc $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ **< 0 :** donc les vecteurs $\vec{V_e}$ et sont colinéaires mais de sens contraires. Le vecteur est donc dirigé vers le bas. Cela est cohérent : le réacteur éjecte les gaz vers le bas.

• **A l'aide d'une loi connue qu'on énoncera, expliquer pourquoi l'éjection des gaz propulse la fusée vers le haut.**

D'après la 3ème loi de Newton, principe des actions réciproques : les réacteurs appliquent sur les gaz une force verticale vers le bas pour les éjecter : c'est l'action, alors les gaz exercent sur la fusée une force verticale vers le haut de même valeur : c'est la réaction.

2) Étude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

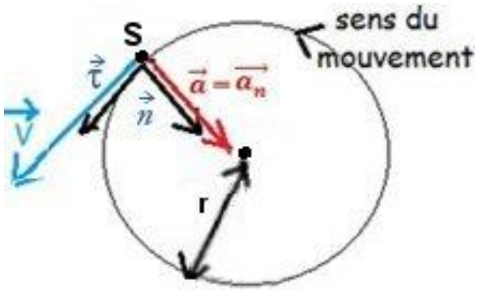
On s'intéresse au mouvement d'un satellite artificiel S, de masse m_s, en orbite circulaire (rayon r) autour de la Terre de masse M_T, de rayon R_T et de centre O. On suppose que la Terre est une sphère et que le satellite peut être assimilé à un point.

2.1. Caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ (mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v).

Dans le cas d'un mouvement circulaire, dans le repère de Frénet, l'accélération est :

$\vec{a} = a_T.\vec{\tau} + a_n.\vec{n} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$.

avec $\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire circulaire, orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ vecteur unitaire radial et centripète.



Comme le mouvement circulaire est uniforme : v = cte donc $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

L'accélération $\vec{a}$ est donc uniquement égale à l'accélération normale :

Elle est centripète : $\boxed{\vec{a} = \vec{a_n} = \frac{v^2}{r}\vec{n}}$ dirigée suivant c'est-à-dire vers le centre du cercle de rayon $r = R_T + h$.

Valeur de l'accélération : $\boxed{a = a_n = \frac{v^2}{r}}$

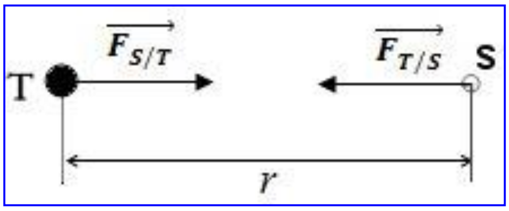
2.2. Enoncer la loi de la gravitation universelle. G : constante de gravitation universelle. Faire un schéma.

D'après la 3ème loi de Newton (principe des actions réciproques) :

$\overrightarrow{F_{T/S}} = - \overrightarrow{F_{S/T}}$

Les 2 forces : $\overrightarrow{F_{T/S}}$ **et** $\overrightarrow{F_{S/T}}$ sont opposées :

même direction, même valeur mais sens opposé.



2.3. *Le satellite S est à l'altitude h : on a donc r = R + h.*

On appelle $\vec{F_S}$ la force qu'exerce la Terre sur le satellite. Cette force dépend de la position du satellite et on pose $\vec{F_S} = m_s.\vec{g}(h)$. On note g(h) l'intensité de la pesanteur $\vec{g}(h)$ à l'endroit où se trouve le satellite : $|\overrightarrow{g(h)}| = g(h)$.

Exprimer g(h) en fonction de M_T, R_T, h et G puis g(h) en fonction de R_T, h et $g_0 = g(0)$.

La force gravitationnelle exercée par la terre sur le satellite est :

$\boxed{\overrightarrow{F_{T/S}} = \frac{G.m_S\, M_T}{r_{TS}^2}.\vec{n}}$ **avec $r_{TS} = r = R_T + h$** **Valeur :** $F_{T/S} = F_S = \frac{G.m_S M_T}{(R_T+h)^2}$

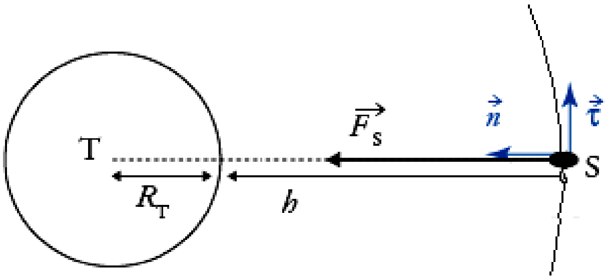
G : constante de gravitation universelle en uS.I.
m_S : masse du satellite en kg
M_T : masse de la terre en kg
R_T : rayon de la Terre en m
h : altitude du satellite en m

or $\vec{F_S} = m_s.\vec{g}(h)$ donc $\boxed{\vec{g}(h) = \frac{G.M_T}{r_{TS}^2}.\vec{n} = \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n}}$

g(h) $= \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2}$

Si h = 0 alors : $g_0 = g(0) = \frac{G.M_T}{R_T^2}$

On fait le rapport : $\frac{g(h)}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$



donc **$g(h) = g_0 . \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$. La valeur de g diminue avec l'altitude**

2.4. Appliquer la deuxième loi de NEWTON au satellite en orbite circulaire.

En déduire l'expression de la vitesse v_s du satellite en fonction de g_0, R_T et h puis sa période de révolution Ts.

- Système : {Le satellite S}
- Référentiel : géocentrique suppose galiléen.
- Forces extérieures appliquées au satellite : La force gravitationnelle : $\boxed{\vec{F_S} = \frac{G.m_S\, M_T}{r_{TS}^2}.\vec{n}}$ **de valeur** $F_S = \frac{G.m_S.M_T}{(R_T+h)^2}$
- Deuxième loi de Newton : $\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$
- soit : $\vec{F_S} = m_S.\vec{a}$ **soit** $\frac{G.m_S\, M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{n} = m_S.\vec{a}$ **. On projette cette expression sur $\vec{n}$:**

donc : $\frac{G.m_S\, M_T}{(R_T+h)^2} = m_S.a_n$ **soit** $\boxed{a_n = \frac{G.\ M_T}{(R_T+h)^2}}$ **. Le mouvement du satellite étant circulaire uniforme : $a_n = \frac{v^2}{R_T+h}$**

donc $\frac{v^2}{R_T+h} = \frac{G.\ M_T}{(R_T+h)^2}$ **. On simplifie :** $v^2 = \frac{G.M_T}{R_T+h}$ **soit** $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$

- Pendant une révolution, la distance parcourue est $d = 2\pi.(R_T + h)$: tour d'une circonférence de rayon $r = R_T + h$

à la vitesse constant $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$ **donc** $T_S = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}} = 2\pi.\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{G.M_T}}$ **soit** $T_S = 2\pi.\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{G.M_T}}$

2.5. Application numérique : R_T = 6400 km = $6400*10^3$ m ; h = 200 km = $200*10^3$ m ; G = $6{,}67.10^{-11}$ N.kg^{-2}.m^2 ;
$M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg.

On trouve : $v_S = 7{,}8.10^3$ m.s^{-1} ; $T_S = 5{,}3.10^3$ s.