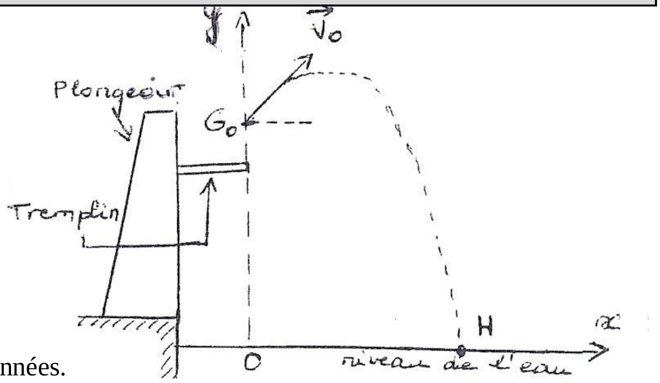
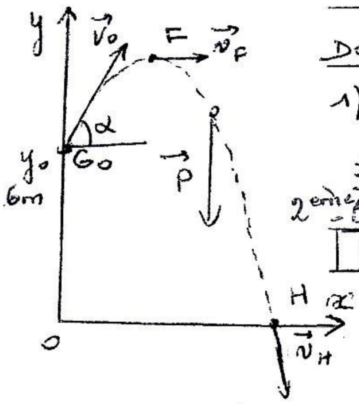
Ch.6. Exercice corrigé. Plongeur. Trajectoire parabolique



On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie d'un plongeur au cours d'un saut modélisé type "saut de l'ange".
On donne g = 9,8 m.s^{-2}.
On négligera dans tout l'exercice le mouvement de rotation du plongeur autour de son centre d'inertie ainsi que les frottements avec l'air. Le repère d'étude xOy est défini à partir du schéma.

1. Après s'être lancé, le plongeur quitte le tremplin à l'instant t = 0 avec un vecteur vitesse $\vec{v_0}$ incliné de α = 40° par rapport à l'horizontale. Son centre d'inertie est alors G_0 de coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 6$ m.
Etablir l'équation littérale de la trajectoire du plongeur en fonction des données.
2. Le sommet de la trajectoire étant atteint au point F d'abscisse x_F = 1,0 m, en déduire la vitesse initiale v_0.
3. Le plongeur pénètre dans l'eau en H. Quelle est sa vitesse en H ?



Conditions initiales : A t = 0 $x_0 = 0$ et $y_0 = 6{,}0$ m.

Données : $\alpha = 40°$, g = 9,8 m.s^{-2}

$\vec{v_0} = \vec{v_{0x}} + \vec{v_{0y}} = v_0 \sin\alpha\, \vec{i} + v_0 \cos\alpha\, \vec{j}$

1) Equation littérale de la trajectoire :

Réf : terrestre, supposé galiléen. Syst { le plongeur }.

Inv des forces : Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dirigé suivt la verticale, vers le bas

2ème loi de Newton $\sum \vec{f_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ soit $\vec{P} = m\vec{a}$, soit $m\vec{g} = m\vec{a}$, soit

$\boxed{\vec{g} = \vec{a}}$: il s'agit d'une chute libre.

On projette dans le système d'axes $(O\vec{x}, O\vec{y})$

$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$ $\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = cste = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + cste = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$ $\vec{OG} \begin{cases} x = v_0(\cos\alpha)t + \overset{0}{x_0} \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t + y_0 \end{cases}$

Les équations horaires sont :

$\boxed{\begin{array}{ll} x(t) = v_0(\cos\alpha)t & (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t + y_0 & (2) \end{array}}$

On élimine t entre (1) et (2) : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

(2) : $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0(\sin\alpha)\frac{x}{v_0\cos\alpha} + y_0$ soit

$\boxed{y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + v_0(\tan\alpha)x + y_0}$

De la forme $y = Ax^2 + Bx + C$ avec $A < 0$: Parabole dont la concavité est tournée vers les $y < 0$

2) On sait que $x_F = 1$ m. En déduire v_0 :

En F : sommet de la trajectoire : $v_{yF} = 0$

$\vec{v_F} \begin{cases} \dot{x}_F = v_{xF} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}_F = v_{yF} = 0 \Rightarrow -gt_F + v_0 \sin\alpha = 0 \end{cases}$ On tire t_F :

$\Rightarrow \boxed{t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$

Remplaçons dans x_F :

$x_F = v_0(\cos\alpha)t_F = v_0\cos\alpha\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \boxed{\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = x_F}$ ($2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$)

Soit : $v_0 = \sqrt{\frac{2g\,x_F}{\sin 2\alpha}}$ $\underline{\underline{AN}}$ $v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}8 \times 1{,}0}{\sin(2\times 40°)}} = \underline{\underline{4{,}5 \text{ m.s}^{-1}}}$ (16,2 km.h^{-1})

3) Vitesse du plongeur en H quand il pénètre dans l'eau :

Variat de l'Ec entre G_0 (état I) et F (état F). La ≠ d'altitude est $h = y_0 = 6$ m entre G_0 et H

$\frac{1}{2}mv_H^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{G_0 \to H}(\vec{P})$ avec $W_{G_0 \to H}(\vec{P}) = mgh = mgy_0$ (travail moteur)

$\frac{1}{2}mv_H^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy_0$ soit $v_H^2 - v_0^2 = 2gy_0$ D'où

$\boxed{v_H = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}$ $\underline{A.N}$ $v_H = \sqrt{4{,}5^2 + 2 \times 9{,}8 \times 6{,}0} = 11{,}7$ m.s^{-1} (42,1 km/h)