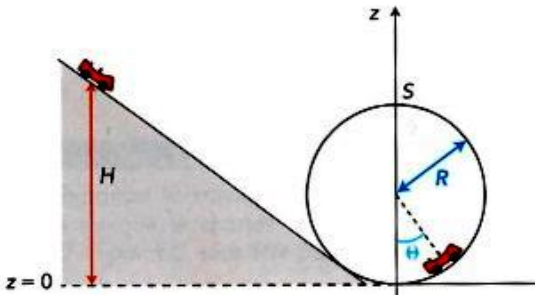
EXERCICE CORRIGE p : 205 n°29. Ch7. TRAVAIL ET ENERGIE

<u>Exercice p 205 n°29.). Le grand huit.</u> Un pas vers l'enseignement supérieur

Un wagon d'un manège de parc d'attraction est propulsé par catapulte à une hauteur H. Il est ensuite abandonné, sans vitesse initiale, dans une grande descente, puis effectue un looping de forme circulaire de 38 m de diamètre.
Dans la partie circulaire, la position du wagon est repérée par l'angle θ (voir schéma ci-dessous).
On supposera que les frottements sont négligeables lors du mouvement du wagon qui sera assimilé à un point matériel.



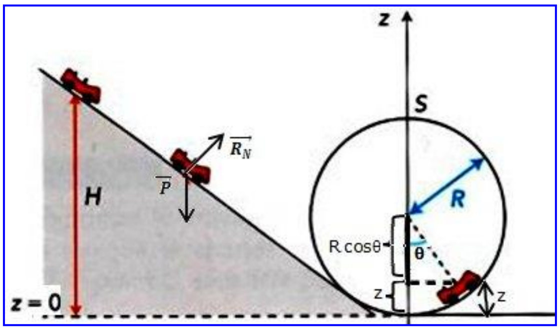
1) Exprimer l'altitude z du wagon en fonction du rayon R de la partie circulaire et de θ.

2) Exprimer la valeur de la vitesse v_M du wagon en un point M repéré par cet angle θ.

3) Que devient cette expression au sommet S de la boucle ?

4) La valeur de la vitesse v_s en S doit être au minimum de 13,8 m s^{-1} pour que le wagon reste en contact avec le rail.
Quelle doit être la hauteur H pour que le wagon passe en S avec cette vitesse ?
Donnée : g = 9,81 m. s^{-2}.

<u>Solution :</u>



1) <u>Altitude z du wagon en fonction du rayon R et de θ.</u>

z = R – R.cos θ (voir figure) soit $\boxed{\mathbf{z = R(1 - \cos\theta)}}$

2) <u>Vitesse v_M du wagon en un point M repéré par cet angle θ.</u>

- **Système** : {la sphère}. • <u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen.
- Inventaire des forces :
  - La sphère est soumise à son poids, $\vec{P}$ = m. $\vec{g}$ suivant la verticale vers le bas.
  - la réaction normale $\vec{R_N}$ du support perpendiculaire au déplacement.
- <u>Conservation de l'énergie mécanique</u> :

  Le poids est une force conservative. Le travail de la force $\vec{R_N}$ est nul.
  Donc **l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.**

• <u>Utilisation de la conservation de l'énergie mécanique</u> :
E_m dans l'état initial (wagon abandonné sans vitesse initiale d'une hauteur H) = **E_m en M** (lorsque le wagon est dans la boucle à l'altitude z.
soit : $Ec_{initiale}$ + $E_{PP\ initiale}$ = Ec (M) + E_{pp} (M)
soit : 0 + m.g.H = $\frac{1}{2}$ m.v_M^2 + m.g.z_M Pour déterminer v_M, on simplifie par m et on multiplie par 2, soit :
2 g.H = v_M^2 + 2 g.z_M $\Rightarrow$ $\boxed{v_M = \sqrt{2\,g\,(H - z_M)}}$
Or z_M = R – R.cos θ = R (1 – cos θ). En remplaçant dans v_M : $\boxed{v_M = \sqrt{2\,g[H - R(1 - \cos\theta)]}}$

3) <u>Que devient cette expression au sommet S de la boucle</u> :

Au sommet de la boucle, en S, l'angle **$\theta = \pi$.** En remplaçant, on obtient v_S:

$v_S = \sqrt{2\,g[H - R(1 - \cos\pi)]} = \sqrt{2\,g[H - R(1 - (-1))]} = \sqrt{2\,g[H - R(2)]}$ soit $\boxed{v_S = \sqrt{2\,g(H - 2R)}}$

4) <u>Calculons la hauteur H pour que le wagon passe en S avec cette vitesse v_S</u> :

De l'expression de v_S, on tire H : Pour cela, on élève v_S au carré : v_S^2 = 2g (H – 2R) soit v_S^2 = 2g .H – 4g.R $\Rightarrow$ 2g .H = v_S^2 + 4g.R

Donc H = $\frac{v_S^2}{2g} + \frac{4g.R}{2g}$ soit $\boxed{H = \frac{v_S^2}{2g} + 2.R}$

<u>**A.N.**</u> : v_S = 13,8 m s^{-1} ; *g = 9,81 m. s^{-2} ; R = 38 m.*

Donc : H = $\frac{13{,}8^2}{2*9{,}81}$ + 2*38 = **<u>48 m</u>.**

Pour que la valeur de la vitesse v_s en S soit au minimum de 13,8 m s^{-1}, il faut que la hauteur H soit au moins de 48 m.