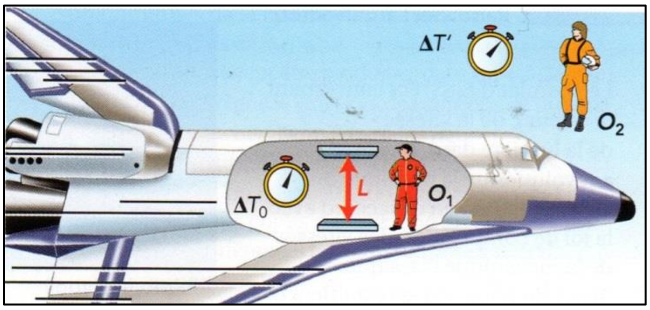
Ch.8 Exercice corrigé. p : 223 n°20. TEMPS ET RELATIVITE RESTREINTE.

p : 223 n°20. Quand les durées se dilatent. Compétences : Schématiser une situation; raisonner.

La relativité restreinte conduit à des conclusions surprenantes dont celle de la dilatation des durées. L'expérience de pensée suivante permet de démontrer la formule de dilatation des durées et l'expression du coefficient. Elle utilise une « horloge de lumière » qui est un dispositif imaginaire constitué de deux miroirs parallèles (représentés en bleu dans le schéma ci-dessous) entre lesquels les allers-retours d'un faisceau lumineux rythment le temps. Dans un vaisseau, un observateur O_1, immobile par rapport à l'horloge de lumière, mesure la durée ΔT_0 d'un aller-retour de la lumière entre les deux miroirs distants d'une longueur L. La lumière se déplace à une vitesse de valeur c.



Un autre observateur O_2, à l'extérieur du vaisseau, regarde l'horloge et la voit se déplacer horizontalement à une vitesse de valeur v constante. Dans le référentiel galiléen lié à O_2, le faisceau de lumière parcourt une distance plus grande que celle parcourue dans le référentiel galiléen relié à O_1 du fait du déplacement du vaisseau (schéma ci-dessus).

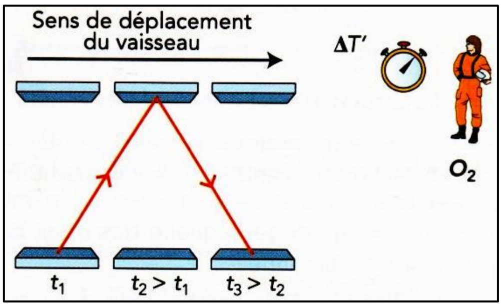
La lumière ayant une vitesse de valeur c indépendante du référentiel, la durée $\Delta T'$ mesurée par O_2 sera supérieure àΔT_0.

1. Lequel des observateurs mesure la durée propre?

2.a. Pour O_1, quelle est la distance parcourue par la lumière lors d'un aller-retour entre les deux miroirs?

b. Exprimer cette distance en fonction de c et de ΔT_0.

3.a.Sur le schéma ci-dessous, on a représenté différentes positions de l'horloge observée par O_2 lors d'un aller-retour de la lumière entre les 2 miroirs.



Pour O_2, exprimer, en fonction de v et de $\Delta T'$, la distance d parcourue par l'astronef pendant un aller simple de la lumière.

b. On appelle l la distance parcourue par la lumière dans le référentiel lié à O_2 pendant la durée $\Delta T'$.

Recopier et compléter le schéma de la question 3a en faisant apparaître d, *L* et $\frac{l}{2}$.

c. Quelle est la relation entre *d*, *L* et **l ?**

4.a. Exprimer la distance *l* en fonction de c et de $\Delta T'$.

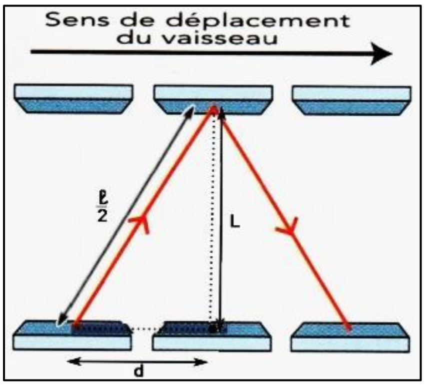
b. À l'aide des questions précédentes, exprimer la durée $\Delta T'$ en fonction de ΔT_0 et montrer que le coefficient γ apparaissant vaut : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

5. Pourquoi parle-t-on de dilatation des durées dans le titre de l'exercice?

1. Evènement A : dans le vaisseau : départ de la lumière vers le miroir. **Evènement B :** dans le vaisseau : retour de la lumière réfléchie. L'observateur O_1 est proche des 2 évènements dont il mesure la durée. Le **référentiel propre est le référentiel lié au vaisseau** : c'est l'observateur O_1 qui mesure la durée propre.

2.a. Dans le référentiel propre, pour O_1, fixe par rapport à l'horloge de lumière, la distance parcourue lors d'un aller-retour de la lumière est : $\boxed{d = 2L}$

2.b. Cette distance 2L est parcourue à la vitesse constante c, pendant la durée propre ΔT_0. Donc : $2.L = c.\ \Delta T_0$ donc $\boxed{L = \frac{c.\Delta T_0}{2}}$



3.a. Pour O_2, exprimons, en fonction de v et de $\Delta T'$, la distance d parcourue par l'astronef pendant un aller simple de la lumière :

Pour O_2 à l'extérieur du vaisseau spatial, la distance parcourue par la lumière lors d'un aller-retour correspond à une durée mesurée $\Delta T'$. Donc : $2d = v\Delta T'$. La durée d'un aller simple est donc $\frac{\Delta T'}{2}$.

La distance d parcourue par l'astronef pour un aller simple est donc : $\boxed{d = v.\frac{\Delta T'}{2}}$.

3.b. l : distance parcourue par la lumière dans le référentiel lié à O_2 pendant la durée $\Delta T'$. voir schéma.

3.c. $\Delta T'$: durée d'un aller retour de la lumière (pour l'observateur O_2 à l'extérieur). Distance parcourue par la lumière pour cet aller-retour : l. Pour un aller simple, la distance parcourue par la lumière est l/2. On utilise le théorème de Pythagore : dans le triangle rectangle : $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = d^2 + L^2$

4.a. Exprimons la distance *l* en fonction de c et de $\Delta T'$.

Dans le référentiel de l'observateur O_2, la lumière parcourt la distance l, à la vitesse c pendant la durée $\Delta T'$, donc $\boxed{l = c.\ \Delta T'}$.

4.b. Exprimons la durée $\Delta T'$ en fonction de ΔT_0 :

On a $l = c.\ \Delta T'$ et relation de Pythagore : $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = d^2 + L^2$ donc : $\boxed{\left(\frac{c.\Delta T'}{2}\right)^2 = d^2 + L^2}$. De plus $d = v.\ \frac{\Delta T'}{2}$ (question 3.a.) et $L = \frac{c.\Delta T_0}{2}$ (question 2.b.) donc : $\boxed{\left(\frac{c.\Delta T'}{2}\right)^2 = \left(v.\frac{\Delta T'}{2}\right)^2 + \left(\frac{c.\Delta T_0}{2}\right)^2}$. En multipliant par 4 : $(c.\Delta T')^2 = (v.\Delta T')^2 + (c.\Delta T_0)^2$

Montrons que le coefficient γ apparaissant vaut : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$: On exprime $\Delta T'$ en fonction deΔT_0 : $\Delta T'^2 (c^2 - v^2) = c^2 (\Delta T_0)^2$ soit

$\Delta T'^2 = \frac{c^2.\Delta T_0^2}{c^2 - v^2}$ soit $\Delta T'^2 = \frac{\Delta T_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ soit $\Delta T' = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. On a $\boxed{\textbf{bien } \Delta T' = \gamma .\Delta T_0 \textbf{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

5. **Pourquoi parle-t-on de dilatation des durées dans le titre de l'exercice ?** Il faut montrer que **$\Delta T' > \Delta T_0$** donc montrer que $\gamma > 1$:

$v < c$ donc $0 < \frac{v}{c} < 1$ donc $0 < \left(\frac{v}{c}\right)^2 < 1$ donc $-1 < -\frac{v^2}{c^2} < 0$ donc $0 < 1 - \frac{v^2}{c^2} < 1$ ainsi que sa racine. Donc l'inverse $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$

soit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$. **Donc $\Delta T' = \gamma .\Delta T_0$ est donc toujours supérieur (ou égal) à ΔT_0. La durée mesurée dans** un autre référentiel que le référentiel propre est toujours supérieure (ou égale) à la période propre. D'où le titre : **« quand les durées se dilatent ».**